

# Analisis Validitas Rumus Deret Aritmatika dan Geometri Melalui Pendekatan Induksi Matematika

Ahmad Boutros Fathir-13525002<sup>1</sup>

Program Studi Teknik Informatika

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika

Institut Teknologi Bandung, Jalan Ganesha 10 Bandung

E-mail: [pathfrfr@gmail.com](mailto:pathfrfr@gmail.com), [13525002@std.stei.itb.ac.id](mailto:13525002@std.stei.itb.ac.id)

**Abstrak**—Induksi matematika merupakan sebuah metodologi pembuktian deduktif yang digunakan untuk menguji keabsahan suatu pernyataan matematika agar berlaku secara konsisten pada setiap himpunan bilangan asli. Makalah ini akan membahas tentang rumus-rumus deret aritmatika dan geometri melalui induksi matematika dengan tujuan untuk memberikan kepastian hukum matematis (validitas mutlak) bahwa rumus jumlah deret aritmatika dan geometri bukan sekadar kebetulan, melainkan hukum yang berlaku universal untuk semua bilangan bulat positif.

**Kata Kunci**—Matematika diskrit, Induksi matematika, Deret Aritmatika, Deret Geometri

## I. PENDAHULUAN

Matematika diskrit merupakan cabang matematika yang mengkaji objek-objek yang terpisah, yaitu objek yang tidak terhubung, bukan objek yang kontinu, dan bisa dihitung, seperti bilangan bulat, graf, dan logika. Menurut Rosen & Kenneth H (2019), matematika diskrit didefinisikan sebagai bagian dari matematika yang berkaitan dengan objek-objek yang diasumsikan memiliki nilai yang berbeda dan terpisah. Di sisi lain, Epp & Susanna S (2020) menyatakan bahwa matematika diskrit adalah studi mengenai objek-objek matematika yang memiliki sifat terpisah dan dapat dihitung, serta menekankan pentingnya logika dan pembuktian di dalam matematika diskrit.

Fungsi matematika diskrit dalam bidang ilmu computer dan algoritma yaitu menyediakan fondasi teoritis untuk analisis algoritma, struktur data, dan kompleksitas komputasi. Rosen & Kenneth H (2019) menekankan bahwa matematika diskrit penting dalam ilmu komputer karena computer menyimpan dan memanipulasi informasi secara diskrit.

Ruang lingkup materi matematika diskrit, yaitu logika matematika, teori himpunan, relasi dan fungsi, prinsip-prinsip pembuktian, induksi matematika dan rekursi, teori bilangan dasar, permutasi dan kombinasi.

Induksi Matematika sudah ada sejak abad ke-19 yang dipelopori oleh R. Dedekind dan G Peano. Dedekind mengembangkan sekumpulan aksioma yang menggambarkan bilangan bulat positif. Peano memperbaiki aksioma tersebut

dan memberikan interpretasi logis. Keseluruhan aksioma tersebut dinamakan dengan *Postulat Peano*.

Deret aritmatika dan Geometri merupakan konsep matematika yang diajarkan pada tingkat pendidikan dasar dan umumnya mudah dipahami oleh siswa. Deret aritmatika juga didefinisikan sebagai jumlah suku yang terdapat dalam barisan aritmatika. Selain itu, deret aritmatika dapat diartikan sebagai barisan di mana setiap suku diperoleh melalui penjumlahan atau pengurangan suku sebelumnya dengan suatu bilangan tetap. Sedangkan deret geometri adalah penjumlahan suku-suku barisan yang memiliki rasio antar suku yang konstan.

Makalah ini akan membahas tentang rumus-rumus deret aritmatika dan geometri melalui induksi matematika dengan tujuan untuk memberikan kepastian hukum matematis (validitas mutlak) bahwa rumus jumlah deret aritmatika dan geometri bukan sekadar kebetulan, melainkan hukum yang berlaku universal untuk semua bilangan bulat positif.

## II. LANDASAN TEORI

### A. Matematika Diskrit

Matematika diskrit merupakan cabang matematika yang mempelajari objek-objek diskrit, yaitu objek yang terpisah, tidak saling berhubungan, tidak berkelanjutan, dan dapat dihitung. Hal ini berbeda dengan matematika kontinu, yang mempelajari objek-objek berkelanjutan dan tak terhingga, sehingga dapat dibagi menjadi bagian-bagian kecil tanpa batas. Ruang lingkup materi matematika diskrit meliputi logika matematika, teori himpunan, relasi dan fungsi, prinsip-prinsip pembuktian, induksi matematika dan rekursi, teori bilangan dasar, serta permutasi dan kombinasi.

Terdapat sebelas fungsi utama, khususnya dalam bidang ilmu komputer dan informatika. Setiap fungsi memiliki aplikasi praktis yang luas dan terus berkembang seiring kemajuan teknologi. Pemahaman yang mendalam terhadap konsep-konsep ini sangat penting untuk mengembangkan solusi inovatif di berbagai bidang, termasuk logistik dan ilmu komputer.

Terdapat lima tingkatan pembelajaran, di mana setiap tingkatan membangun pengetahuan dari tingkat sebelumnya. Mahasiswa umumnya mengembangkan keahlian khusus dalam

satu atau beberapa area pada tingkat yang lebih tinggi. Berikut tingkatan-tingkatannya:

- a. Tingkat Dasar (Fundamental) dalam matematika diskrit berfokus pada pengenalan konsep-konsep elementer yang menjadi pilar utama bagi seluruh materi lanjutan. Pokok bahasan utamanya mencakup Teori Himpunan (operasi dasar dan diagram Venn), Logika Proposisional (operator logika dan tabel kebenaran), Sistem Bilangan (aritmatika modular, biner, dan heksadesimal), serta karakteristik Fungsi dan Relasi (sifat injektif, bijektif, refleksif, dan ekuivalensi). Dalam ranah aplikatif, penguasaan materi dasar ini memegang peranan krusial sebagai fondasi utama dalam penulisan sintaks pemrograman komputer, pengoperasian sistem digital berbasis biner, hingga perancangan arsitektur basis data (*database*) relasional sederhana.
- b. Menengah - Struktur dan Metode. *Karakteristiknya* adalah mengembangkan pemahaman tentang struktur matematika yang lebih kompleks dan teknik pembuktian. *Topik utamanya*, antara lain Kombinatorik Dasar, yaitu permutasi, kombinasi, prinsip pigeonhole; Teori Graf Dasar, yaitu terminologi graf, jenis-jenis graf, representasi graf; Induksi Matematika, yaitu pembuktian dengan induksi, strong induction; Algoritma Dasar, yaitu kompleksitas waktu, notasi Big O, algoritma sorting dan searching; Rekursi, yaitu relasi rekurensi, solving recurrence relations. *Contoh aplikasinya*, yaitu analisis algoritma sederhana, desain jaringan komputer dasar, dan optimasi sederhana dalam logistik.
- c. Lanjutan - Aplikasi Spesifik. *Karakteristiknya* adalah penerapan konsep-konsep matematika diskrit dalam domain-domain khusus dengan kompleksitas tinggi. *Topik utamanya*, antara lain Teori Graf Lanjutan, yaitu algoritma graf (Dijkstra, Kruskal, Prim), graph coloring, network flows; Kombinatorik Lanjutan, yaitu generating functions, inclusion-exclusion principle, Burnside's lemma; Teori Bilangan, algoritma Euclidean, Chinese Remainder Theorem, primitive roots; Kriptografi, yaitu RSA, elliptic curves, discrete logarithm problem; Coding Theory, error-correcting codes, Hamming codes, Reed-Solomon codes. *Contoh aplikasinya*, yaitu sistem keamanan modern (encryption algorithms), optimasi jaringan transportasi, dan algoritma machine learning.
- d. Ekspert - Topik Khusus dan Riset. *Karakteristiknya* adalah topik-topik yang memerlukan pemahaman mendalam dan sering menjadi area penelitian aktif. *Topik utamanya*, antara lain Computational Complexity, yaitu P vs NP, polynomial hierarchy, approximation algorithms; Algebraic Graph Theory, yaitu spectral graph theory, graph automorphisms; Extremal Combinatorics, yaitu Ramsey theory, probabilistic method; Discrete Geometry, yaitu

computational geometry, polytopes, lattice theory; Formal Methods, yaitu model checking, temporal logic, verification. *Contoh aplikasinya*, yaitu penelitian kompleksitas komputasi, pengembangan algoritma quantum, dan verification sistem software critical.

- e. Penelitian dan Spesialisasi. *Karakteristiknya*, adalah area penelitian mutakhir yang menggabungkan matematika diskrit dengan bidang lain. *Topik utamanya*, antara lain Quantum Computing, yaitu quantum algorithms, quantum complexity theory; Bioinformatics, yaitu phylogenetic reconstruction, sequence analysis; Network Science, yaitu complex networks, scale-free networks, small-world phenomena; Algorithmic Game Theory, yaitu mechanism design, social choice theory; Topological Data Analysis, yaitu persistent homology, computational topology. *Contoh aplikasinya*, yaitu pengembangan komputer quantum, analisis big data dan machine learning, dan modeling sistem biologis kompleks.

## B. Induksi Matematika

Perkembangan metode induksi matematika berakar dari pemikiran dua matematikawan terkemuka abad ke-19, yaitu R. Dedekind dan G. Peano. Dedekind mengawali konstruksi ini dengan merumuskan serangkaian aksioma untuk mendefinisikan karakteristik bilangan bulat positif. Rumusan tersebut kemudian disempurnakan oleh Peano melalui pemberian interpretasi logis yang lebih rigid. Rangkaian prinsip dasar inilah yang kelak dikenal secara luas dalam dunia matematika sebagai **Postulat Peano**.

Secara konseptual, induksi matematika merupakan sebuah metodologi pembuktian deduktif yang digunakan untuk menguji keabsahan suatu pernyataan matematika agar berlaku secara konsisten pada setiap himpunan bilangan asli. Induksi matematika adalah salah satu teknik atau metode pembuktian dasar dalam matematika yang harus dipahami sejak awal karena akan digunakan pada materi matematika selanjutnya.

Prosedur pembuktian menggunakan metode ini bertumpu pada 2 tahapan utama:

### 1. Basis Induksi

Tahap awal untuk membuktikan bahwa pernyataan atau rumus tersebut bernilai benar ketika diaplikasikan pada suku pertama, yaitu  $n = 1$

### 2. Langkah Induksi

Tahap pembuktian logis yang menunjukkan bahwa jika pernyataan tersebut diasumsikan benar untuk suku ke-  $n$  (atau  $n = k$ ) maka pernyataan tersebut terbukti harus berlaku benar pula untuk suku berikutnya, yaitu bilangan  $(n + 1)$  (atau  $n = k + 1$ )

Berdasarkan 2 tahapan utama dari prinsip induksi matematika di atas, berikut contoh untuk induksi matematika:

Contoh 1.

Buktikan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Untuk semua  $n \geq 1$

Solusi:

1. Basis Induksi.

Untuk  $n = 1$ , diperoleh

$$\begin{aligned} 1^2 &= \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \\ &= \frac{1(2)(3)}{6} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Sisi kanan dan kiri sama, maka suatu pernyataan dinyatakan benar.

2. Langkah Induksi.

Misalkan bahwa

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{adalah benar}$$

dengan menunjukkan  $n = k + 1$  juga berlaku.

Dengan  $n = k + 1$  maka diperoleh pernyataan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2, n \geq 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \text{ faktorkan} \\ &= \frac{(n+1)(n+1+1)[2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

Pernyataan dinyatakan benar.

Dari pernyataan pertama hingga pernyataan terakhir, rangkaian kesamaan ini merupakan pernyataan untuk  $n = k+1$ . Jadi kebenaran pernyataan untuk  $n = k$  secara tidak langsung menyatakan kebenaran pernyataan untuk  $n = k+1$ . Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti benar untuk setiap bilangan bulat positif  $n$ .

### C. Deret Aritmatika

Deret aritmatika merupakan konfigurasi barisan bilangan dengan karakteristik setiap sukunya dihasilkan dari akumulasi atau reduksi suku sebelumnya menggunakan nilai beda yang konstan.

Rumus deret aritmatika terdiri dari nilai suku pertama yang dilambangkan dengan  $a$ . Sedangkan selisih atau beda antara nilai suku-suku yang berdekatan selalu sama, yaitu  $b$ .

Nilai suku ke- $n$  dari suatu barisan aritmatika dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Dimana:

$S_n$  = jumlah  $n$  suku pertama

$U_1 = a$  = suku pertama (ke-1) dalam barisan aritmatika

$b$  = beda

$n$  = banyak suku dalam barisan aritmatika

Untuk mengetahui nilai suku ke- $n$  ( $U_n$ ) dari suatu barisan aritmatika dapat dihitung dengan rumus berikut ini.

$$U_n = a + (n-1)b$$

Selanjutnya, jika ingin menghitung deret aritmatika yang merupakan penjumlahan dari suku-suku pertama sampai suku ke- $n$  barisan aritmatika, dapat disubstitusikan rumus di atas ke dalam rumus deret aritmatika berikut.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a + U_n) \\ U_n &= a + (n-1)b \\ S_n &= \frac{n}{2}(a + (a + (n-1)b)) \\ S_n &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \end{aligned}$$

### D. Deret Geometri

Deret geometri adalah penjumlahan suku-suku dari barisan geometri. Penjumlahan dari suku-suku pertama sampai suku ke- $n$  barisan geometri dapat dihitung dengan rumus berikut.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} && \text{dengan syarat } r < 1 \\ S_n &= \frac{a(r^n-1)}{(r-1)} && \text{dengan syarat } r > 1 \end{aligned}$$

### E. Python

Python merupakan bahasa pemrograman interpretatif multiparsing yang mengutamakan tingkat keterbacaan kode sebagai filosofi dasar perancangannya. Bahasa ini mengintegrasikan fungsionalitas tingkat tinggi dengan sintaksis yang lugas, serta didukung oleh ekosistem pustaka standar yang luas dan komunitas pengguna yang masif. Secara arsitektural, Python mengakomodasi pemrograman berorientasi objek, imperatif, dan fungsional. Karakteristik utamanya sebagai bahasa pemrograman dinamis ditunjukkan melalui implementasi manajemen memori otomatis. Meskipun secara konvensional sering difungsikan sebagai bahasa skrip (*scripting language*), dalam perkembangannya Python diadopsi secara luas untuk berbagai platform sistem operasi serta beragam kebutuhan rekayasa perangkat lunak skala besar.

Saat ini kode Python dapat dijalankan di berbagai platform sistem operasi, beberapa di antaranya adalah Linux/Unix, Windows, Mac os X, Java Virtual Machine, Amiga, Palm dan Symbian (untuk produk-produk Nokia). Python didistribusikan dengan beberapa lisensi yang berbeda dari beberapa versi.

### III. PEMBUKTIAN RUMUS

#### A. Pembuktian Rumus Deret Aritmatika

Melalui dua tahapan utama rumus Induksi matematika akan dibuktikan bahwa rumus Deret Aritmatika melalui pendekatan Induksi Matematika bernilai Valid, sebagai berikut:

Basis Induksi ( $n = 1$ ) dan Langkah Induksi (asumsi  $n = k$  implikasi  $n = k + 1$ ). Deret aritmatika memiliki suku ke- $n$  dengan rumus  $u_n = a + (n - 1)b$ .

Rumus jumlah  $n$  suku pertama ( $S_n$ ) yang akan dibuktikan sebagai berikut:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n - 1)b]$$

Langkah 1 : Basis Induksi ( $n = 1$ )

- Sisi Kiri ( $S_1$ ): Suku pertama dari deret adalah  $a$
- Sisi Kanan : Substitusi  $n = 1$  ke dalam rumus:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} [2a + (1 - 1)b] \\ &= \frac{1}{2} [2a + 0] \\ &= \frac{1}{2} [2a] = a \end{aligned}$$

Karena Sisi Kiri = Sisi Kanan ( $a = a$ ), maka terbukti bahwa Basis Induksi terpenuhi (Valid).

Langkah 2: Langkah Induksi

- Asumsi ( $n = k$ ): di asumsikan rumus benar untuk  $n = k$   
 $S_k = a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (k - 1)b]$   
 $= \frac{k}{2} [2a + (k - 1)b]$

- Target ( $n = k + 1$ ): Membuktikan bahwa rumus benar untuk  $n = k + 1$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{k+1}{2} [2a + ((k+1) - 1)b] \\ &= \frac{k+1}{2} [2a + kb] \end{aligned}$$

Langkah 3: Aljabar Pembuktian

Hubungan antara  $S_{k+1}$  dan  $S_k$  adalah  $S_{k+1} = S_k + u_{k+1}$ .

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \underbrace{a + (a + b) + (a + 2b) + \dots + [a + (k - 1)b]}_{S_k} \\ &\quad + \underbrace{[a + kb]}_{u_{k+1}} \end{aligned}$$

Substitusikan asumsi  $S_k$  ke dalam persamaan:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{k}{2} [2a + (k - 1)b] + [a + kb] \\ S_{k+1} &= ka + \frac{k(k - 1)b}{2} + a + kb \end{aligned}$$

Substitusikan asumsi  $S_k$  ke dalam persamaan:

$$S_{k+1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$$

Kelompokan suku-suku yang mengandung  $a$  dan suku-suku yang mengandung  $b$ :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (ka + a) + \left( \frac{k^2b - kb}{2} + \frac{2kb}{2} \right) \\ S_{k+1} &= a(k + 1) + \frac{b(k^2 + kb)}{2} \\ S_{k+1} &= a(k + 1) + \frac{kb(k + 1)}{2} \end{aligned}$$

Faktorkan keluar  $(k + 1)$ :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k + 1) \left[ a + \frac{kb}{2} \right] \\ S_{k+1} &= \frac{k + 1}{2} [2a + kb] \end{aligned}$$

Langkah induksi selesai. Sisi kanan hasil penjabaran sama persis dengan target pembuktian.

#### B. Pembuktian Rumus Deret Geometri

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa rumus Deret Geometri dinyatakan valid melalui pendekatan Induksi Matematika. Deret geometri memiliki suku ke- $n$  dengan rumus  $u_n = ar^{n-1}$ .

Rumus jumlah  $n$  suku pertama ( $S_n$ ) dengan rasio  $r \neq 1$  yang akan dibuktikan sebagai berikut:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

Langkah 1 : Basis Induksi ( $n = 1$ )

- Sisi Kiri ( $S_1$ ): Suku pertama dari deret adalah  $a$
- Sisi Kanan : Substitusi  $n = 1$  ke dalam rumus:

$$S_1 = \frac{a(r^1 - 1)}{r - 1} = a$$

Karena Sisi Kiri = Sisi Kanan ( $a = a$ ), maka terbukti bahwa Basis Induksi terpenuhi (Valid)

Langkah 2: Langkah Induksi

- Asumsi ( $n = k$ ): di asumsikan rumus benar untuk  $n = k$

$$S_k = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1} = \frac{a(r^k - 1)}{r - 1}$$

- Target ( $n = k + 1$ ): Membuktikan bahwa rumus benar untuk  $n = k + 1$

$$S_{k+1} = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}$$

Langkah 3: Aljabar Pembuktian

Hubungan antara  $S_{k+1}$  dan  $S_k$  adalah  $S_{k+1} = S_k + u_{k+1}$ .

$$S_{k+1} = \underbrace{a + ar + ar^2 + \dots + ar^{k-1}}_{S_k} + \underbrace{ar^k}_{u_{k+1}}$$

Samakan penyebut kedua suku dengan mengalirkan  $ar^k$  dengan  $\frac{r-1}{r-1}$ :

$$S_{k+1} = a(r^k - 1) + \frac{ar^k(r-1)}{r-1}$$

$$S_{k+1} = \frac{ar^k - a + ar^{k+1} - ar^k}{r-1}$$

Suku  $ar^k$  dan  $-ar^k$  saling menghilangkan ( $ar^k - ar^k = 0$ ):

$$S_{k+1} = \frac{ar^{k+1} - a}{r-1}$$

Faktorkan konstanta  $a$  keluar dari pembilang:

$$S_{k+1} = \frac{a(r^{k+1} - 1)}{r-1}$$

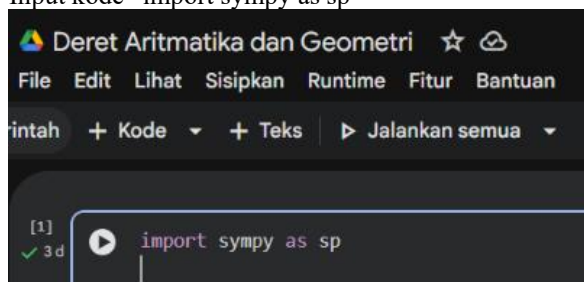
Langkah induksi selesai. Sisi kanan hasil penjabaran terbukti sama dengan target fungsi  $S_{k+1}$ .

### C. Pembuktian Rumus Deret Aritmatika dan Geometri menggunakan Python

Penulis menggunakan bahasa pemrograman *Python* dengan pustaka bernama *SymPy* (*Symbolic Python*). *SymPy* memungkinkan *Python* untuk membaca variabel seperti  $(a, b, r, k)$  sebagai simbol aljabar murni (bukan sekadar angka), lalu menyederhanakan persamaannya secara otomatis.

Berikut kode program *Python* yang akan dilakukan untuk rumus Deret Aritmatika dan Deret Geometri sebagai berikut:

1. Input kode "import sympy as sp"



Gambar 1. Kode Import Symp As Sp

2. Kemudian, masukkan kode berikut untuk membuktikan kevalidan rumus deret aritmatika melalui pendekatan induksi matematika

```
# 1. Inisialisasi simbol matematika agar dibaca sebagai variabel aljabar
n, k, a, b, r = sp.symbols('n k a b r')

print("=== VERIFIKASI LANGKAH INDUKSI MATEMATIKA ===\n")

# BAGIAN 1: VERIFIKASI DERET ARITMATIKA
# Definisi fungsi rumus S_n Aritmatika
def S_arith(n_sym):
    return (n_sym / 2) * (2 * a + (n_sym - 1) * b)

# Suku ke-(k+1) Aritmatika: u_{k+1} = a + k*b
u_arith_k1 = a + k * b

# Langkah Induksi Sisi Kiri: S_k + u_{k+1}
sisi_kiri_arith = S_arith(k) + u_arith_k1

# Langkah Induksi Sisi Kanan: S_{k+1}
sisi_kanan_arith = S_arith(k + 1)

# Cek validitas (Sisi Kiri - Sisi Kanan harus sama dengan 0 setelah disederhanakan)
eliminasi_arith = sp.simplify(sisi_kiri_arith - sisi_kanan_arith)

print(f"[Aritmatika] Sisi Kiri (S_k + u_{k+1}) : {sisi_kiri_arith}")
print(f"[Aritmatika] Sisi Kanan (S_{k+1})       : {sisi_kanan_arith}")
print(f"[Aritmatika] Hasil (Kiri - Kanan)       : {eliminasi_arith}")
print(f"👉 Kesimpulan Langkah Induksi Aritmatika VALID: {eliminasi_arith == 0}")
```

Gambar 2. Kode Verifikasi Deret Aritmatika

3. Selanjutnya, akan di masukkan juga kode untuk verifikasi deret geometri melalui pendekatan induksi matematika berikut:

```
# BAGIAN 2: VERIFIKASI DERET GEOMETRI
# Definisi fungsi rumus S_n Geometri
def S_geom(n_sym):
    return a * (r**n_sym - 1) / (r - 1)

# Suku ke-(k+1) Geometri: u_{k+1} = a * r**k
u_geom_k1 = a * (r**k)

# Langkah Induksi Sisi Kiri: S_k + u_{k+1}
sisi_kiri_geom = S_geom(k) + u_geom_k1

# Langkah Induksi Sisi Kanan: S_{k+1}
sisi_kanan_geom = S_geom(k + 1)

# Cek validitas (Sisi Kiri - Sisi Kanan harus sama dengan 0 setelah disederhanakan)
eliminasi_geom = sp.simplify(sisi_kiri_geom - sisi_kanan_geom)

print(f"[Geometri] Sisi Kiri (S_k + u_{k+1}) : {sisi_kiri_geom}")
print(f"[Geometri] Sisi Kanan (S_{k+1})       : {sisi_kanan_geom}")
print(f"[Geometri] Hasil (Kiri - Kanan)       : {eliminasi_geom}")
print(f"👉 Kesimpulan Langkah Induksi Geometri VALID: {eliminasi_geom == 0}")
```

Gambar 3. Kode Verifikasi Deret Geometri

4. Hasil Output dari deret aritmatika dan deret geometri

```
=== VERIFIKASI LANGKAH INDUKSI MATEMATIKA ===

[Aritmatika] Sisi Kiri (S_k + u_{k+1}) : a + b*k + k*(2*a + b*(k - 1))/2
[Aritmatika] Sisi Kanan (S_{k+1})       : (2*a + b*k)*(k/2 + 1/2)
[Aritmatika] Hasil (Kiri - Kanan)       : 0
👉 Kesimpulan Langkah Induksi Aritmatika VALID: True

[Geometri] Sisi Kiri (S_k + u_{k+1}) : a*r**k + a*(r**k - 1)/(r - 1)
[Geometri] Sisi Kanan (S_{k+1})       : a*(r**(k + 1) - 1)/(r - 1)
[Geometri] Hasil (Kiri - Kanan)       : 0
👉 Kesimpulan Langkah Induksi Geometri VALID: True
```

Gambar 4. Hasil Output

Berdasarkan Gambar 4. Hasil output program *Python* di atas menunjukkan bahwa langkah induksi matematika untuk deret aritmatika dan deret geometri telah terbukti valid 100% secara komputasi simbolik.

Interpretasi bagian deret aritmatika sebagai berikut:

- Sisi Kiri ( $S_k + u_{k+1}$ ):  $a + b*k + k*(2*a + b*(k - 1))/2$

Ini merupakan representasi *Python* dari persamaan :

$$\frac{k}{2}[2a + (k - 1)b] + [a + kb]$$

Program berhasil menjumlahkan rumus asumsi  $S_k$  dengan suku berikutnya ( $u_{k+1}$ ).

- Sisi Kanan ( $S_{k+1}$ ):  $(2*a + b*k)*(k/2 + 1/2)$   
Ini adalah bentuk penyederhanaan Python dari rumus target  $S_{k+1}$ , yaitu:  $\frac{k+1}{2} [2a + kb]$
- Hasil (Kiri-Kanan) ; 0  
Pustaka SymPy melakukan operasi aljabar dimana penyebut disamakan, kemudian menjabarkan kurung dan mengeliminasi suku sejenis. Hasil nilainya 0, artinya sisi kiri sama persis dengan sisi kanan
- Kesimpulan: True (pembuktian dinyatakan valid secara mutlak)

Interpretasi bagian deret geometri sebagai berikut:

- Sisi Kiri ( $S_k + u_{k+1}$ ):  $a*r**k + a*(r**k - 1)/(r - 1)$   
Ini adalah representasi dari persamaan:  $\frac{a(r^k - 1)}{r - 1} + ar^k$
- Sisi Kanan ( $S_{k+1}$ ):  $a*(r**(k + 1) - 1)/(r - 1)$   
Ini adalah rumus target geometri untuk suku berikutnya:  $\frac{a(r^{k+1} - 1)}{r - 1}$
- Hasil (Kiri-Kanan): 0  
Nilai dari hasil (kiri-kanan) yaitu 0 maka sisi kiri sama persis dengan sisi kanan.
- Kesimpulan : True (Valid secara mutlak)

Hasil “0” dan “True” pada kedua deret yang dihasilkan menggunakan program Python telah membuktikan bahwa tidak ada kesalahan manipulasi aljabar dalam Langkah induksi yang telah disusun di awal. Secara ilmiah, visualisasi output memperkuat keabsahan teoretis dari rumus deret dan geometri yang diteliti.

#### IV. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembuktian yang telah dilakukan, dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

- Validitas mutlak: rumus jumlah deret aritmatika dan geometri terbukti valid 100% secara matematis untuk semua bilangan bulat positif ( $n \geq 1$ ).
- Efek domino induksi: keberhasilan pemenuhan Basis Induksi ( $n = 1$ ) dan Langkah Induksi ( $n = k \Rightarrow n = k + 1$ ) meruntuhkan risiko generalisasi yang salah (hasty generalization).
- Fondasi teoritis kuat: pembuktian aljabar menunjukkan bahwa pola pertumbuhan linier pada deret aritmatika dan pola eksponensial pada deret geometri konsisten dengan struktur logis rumusnya.
- Akurasi tinggi melalui verifikasi komputasi simbolik: melalui pemanfaatan Bahasa pemrograman Python, manipulasi aljabar pada langkah induksi telah diuji secara digital, membuktikan bahwa

struktur aljabar pada rumus bebas dari galat (*error-free*)

#### V. UCAPAN TERIMA KASIH

Puji Syukur terhadap Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya makalah ini. Penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada seluruh pihak yang telah membantu memberikan referensi dan dukungan moral selama proses penyusunan makalah ini. Semoga analisis validitas rumus deret melalui pendekatan induksi matematika ini dapat memberikan pemahaman yang lebih mendalam mengenai pembuktian dalam matematika.

#### REFERENSI

- [1] Epp, Susanna S. *Discrete Mathematics with Applications*. 5th ed., Cengage Learning, 2020.
- [2] K. H. Rosen, “Advanced Counting Techniques,” in *Discrete mathematics and its applications*, New York, NY: McGraw-Hill, 2019. Lemley, Linda
- [3] Sitorus, Putri Aulia, Nur Rahma Bone, and Rora Rizki Wandini. "Mengenal konsep deret aritmatika dan geometri dengan benar di SD S Al-Ittihadiyah." *Counselia: Jurnal Bimbingan Konseling Pendidikan Islam* 5.2 (2024): 435-441.
- [4] Buhaerah, Buhaerah. "Matematika Diskrit." (2019)..
- [5] <https://online.fliphtml5.com/eodfk/kurv/#p=1>
- [6] Siregar, Majidah Khairani. *Matematika Diskrit*. Perahu Litera, 2018.
- [7] [https://lmsspada.kemdiktisaintek.go.id/pluginfile.php/552777/mod\\_resource/content/2/%5B13%5D%20Barisan%20dan%20Deret%20Geometri.pdf](https://lmsspada.kemdiktisaintek.go.id/pluginfile.php/552777/mod_resource/content/2/%5B13%5D%20Barisan%20dan%20Deret%20Geometri.pdf)
- [8] Syahrudin, Akbar Nur, and Tedi Kurniawan. "Input dan output pada bahasa pemrograman python." *Jurnal Dasar Pemrograman Python STMIK* 20 (2018): 1-7.

#### PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Bandung, 19 Juni 2026



Ahmad Boutros Fathir, 13525002